Példa: X végtelen dimenziós Banach-tér, id:X→X, $\overline{S(0,1)}$ zárt egységgömb, id($\overline{S(0,1)}$)= $\overline{S(0,1)}$.
Riesz-tétel: Ha X végtelen dimenziós Banach-tér, akkor $\overline{S(0,1)}$ nem kompakt.
Biz.: nélkül.

⇒id:X→X nem kompakt operátor.

Tétel (Kompakt operátorok tulajdonságai): X,Y,Z Banach-terek, akkor

i) $\mathcal{K}(X,Y)\subset\mathcal{B}(X,Y)$
ii) Zárt altér, azaz $A_n\in\mathcal{K}(X,Y)$ $A_n\to A\in\mathcal{B}(X,Y)$, akkor $A\in\mathcal{K}(X,Y)$
iii) A_n véges rendű operátor, $A_n\to A\in\mathcal{B}(X,Y)$, akkor $A\in\mathcal{K}(X,Y)$
iv) $B\in\mathcal{K}(X,Y)$, $A\in\mathcal{B}(Y,Z)\Rightarrow AB\in\mathcal{K}(X,Z)$ és
$B\in\mathcal{B}(X,Y)$, $A\in\mathcal{K}(Y,Z)\Rightarrow AB\in\mathcal{K}(X,Z)$
v) $A\in\mathcal{K}(X,Y)\Rightarrow A^*\in\mathcal{K}(Y^*,X^*)$ (Banach-adjungált)

Biz: nélkül.

Tétel: X végtelen dimenziós Banach-tér, $A\in\mathcal{K}(X)$. Ekkor

i) $0\in\sigma(A)$ (A spektruma), azaz vagy A nem invertálható, vagy $\mathcal{R}(A)\neq X$.
ii) $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\}$, akkor λ sajátérték, azaz $A-\lambda I$ nem invertálható, tehát $\exists x\neq 0$ $(A-\lambda I)x=0$
iii) $\sigma(A)=\{0\}$ vagy $\sigma(A)\setminus\{0\}$ véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az utolsó esetben a 0 pont a $\sigma(A)\setminus\{0\}$ egyetlen torlódási pontja-
iv) $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\}$, akkor $A-\lambda I$ véges rangú operátor, azaz $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ véges dimenziós.

Biz.: nélkül.

Kompakt önadjungált operátorok Hilbert-terekben

$(H,\langle .,. \rangle)$ komplex Hilbert-tér, $A\in\mathcal{B}(H)$.

Def: $A\in\mathcal{B}(H)$ önadjungált, ha $A^*=A$, ahol $<Ax,y>=<x,A^*y>$ $\forall x,y\in H$, A^* a Hilbert-adjungált.

Megj.: az önadjungáltság a szimmetrikus mátrix általánosítása.

Tétel: H komplex Hilbert-tér $A\in\mathcal{B}(H)$ önadjungált. Ekkor

i) $<Ax,x>$ valós $\forall x\in H$
ii) A sajátértékei valósak
iii) $\lambda\neq\mu$ sajátértékei A-nak, s_λ és s_μ a hozzátartozó sajátvektorok$\Rightarrow s_\lambda\perp s_\mu$.

Biz.:

i) $<Ax,x>=<x,Ax>=\overline{<Ax,x>}\Rightarrow <Ax,x>$ valós.
ii) λ sajátértéke A-nak, x a hozzátartozó sajátvektor: $<Ax,x>=<\lambda x,x>=\lambda<x,x>$
$<Ax,x>$ valós $<x,x>=\|x\|^2$ ez egy valós szám ⇒ λ is valós.
iii) $As_\lambda=\lambda s_\lambda$,és $As_\mu=\mu s_\mu$
Tekintsük $< As_\lambda, As_\mu>$ -t, és tegyük fel, hogy $\mu\neq 0$!
$\lambda\mu<s_\lambda,s_\mu> = <\lambda s_\lambda,\mu s_\mu> = <As_\lambda,As_\mu> = <s_\lambda,A(A(s_\mu))>= <s_\lambda,\mu(A(s_\mu))> =$

$= \mu <s_\lambda, A(s_\mu)> = \mu^2 <s_\lambda, s_\mu>$.

$\Rightarrow \mu <s_\lambda, s_\mu> (\lambda-\mu) = 0 \Rightarrow <s_\lambda, s_\mu> = 0$, mert $\mu \neq 0$, és $\lambda \neq \mu$.

Tétel: H komplex Hilbert-tér, $A \in \mathcal{K}(H)$ és önadjungált, akkor $r(a) = \|A\|$.

Biz: nélkül.

Tétel (Hilbert-Schmidt): H komplex, szeparábilis Hilbert-tér, A kompakt és önadjungált operátor. Ekkor $\exists (e_n, n<N)$ véges vagy végtelen ortonormált rendszer, amely teljes $\mathcal{R}(A)$-ban, e_n sajátvektora A-nak, hogy x egyértelműen előáll $x = x' + \sum_{n<N} < x, e_n > e_n$ alakban, ahol $x' \in Ker(A)$. Továbbá, az $Ax = \sum_{n<N} \lambda_n < x, e_n > e_n$, ahol λ_n e_n-hez tartozó sajátértéke A-nak és ha $N=\infty$, akkor $\lambda_n \to 0$.

Biz.: nélkül.

Operátor egyenletek

X Banach-tér, $y \in X$, λ komplex szám, $A \in \mathcal{B}(X)$. Keresünk olyan $x \in X$, hogy $(A-\lambda I)x = y$!

Kérdések:
1, van-e megoldás
2, Egyértelműség
3, Mikor lesz egyértelmű a megoldás $\forall y \in X$-re?
4, A megoldás előállítása

Válaszok:
1, Ha $y \in \mathcal{R}(A-\lambda I)$
2, Ha $y \in \mathcal{R}(A-\lambda I)$és $(A-\lambda I)^{-1}$ $\exists$
3, $\forall y$-ra egyértelmű, ha $\mathcal{R}(A-\lambda I) = X$ és $(A-\lambda I)^{-1}$ $\exists$, azaz $\lambda \in \rho(A)$.
4. $Ax - \lambda x = y \Rightarrow \lambda x = Ax - y$ $\quad \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} Ax - \frac{1}{\lambda} y$

Legyen $x_0 := 0$, és $x_{n+1} := \frac{1}{\lambda} Ax_n - \frac{1}{\lambda} y$

Tétel: X Banach-tér, $y \in X$, $\lambda \neq 0$ komplex szám, $A \in \mathcal{B}(X)$.
- i) ha (x_n) konv. és $x^* = \lim x_n$, akkor x^* kielégíti az $(A-\lambda I)x = y$ egyenletet.
- ii) Ha $|\lambda| > r(A)$, akkor (x_n) konv.

Biz: i) A folytonosságából következik, ii) nélkül.