6. Bázisok és frame sorfejtések

Ebben a fejezetben a koordináta rendszer fogalmának általánosításaival foglalkozunk. Véges dimenziós vektor terekben véve egy bázist, bármely vektor egyértelműen állítható elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként. A lineáris kombináció együtthatóit a szóban forgó vektor koordinátáinak nevezzük az adott bázisban. Az ilyen bázisokat — utalva ezek geometriai jelentésére a 2 és 3 dimenziós euklideszi terekben — szokás ferdeszögű koordináta rendszereknek nevezni. n-dimenziós terek esetén a tér vektorait valamely bázisra vonatkozó koordinátáival, azaz rendezett szám n-esekkel jellemezhetjük. Ez a reprezentáció egyrészt lehetővé teszi, hogy a lineáris tér vektorait (pl. komputerekben) ábrázoljuk. Másrészt felhasználva a vektorok geometriai jelentését, számos fogalomnak és eljárásnak szemléletes geometriai tartalmat tulajdoníthatunk.

Sok olyan probléma van a természettudományokban és a gazdasági életben is, amelyek matematikai leírásához végtelen dimenziós terek szükségesek. Ilyen terekben is — amennyiben lehetséges — célszerű koordináta rendszereket használni. A 6.1. pontban — bevezetve a bázis fogalmát — a koordináta rendszer egy végtelen dimenziós terekre vonatkozó általánosításával foglalkozunk.

Az utóbbi évtizedben — elsősorban jel- és képfeldolgozással összefüggésben — egy újabb általánosítást id bevezettek, amely igen hasznosnak bizonyult jelek reprezentációjával kapcsolatban. Ezzel a 6.2. pontban foglalkozunk.

6.1. Bázisok Banach terekben

Szeparábilis Hilbert-térben már korábban bevezettük a derékszögű koordináta rendszer megfelelőjét. Megmutattuk, hogy ilyen terekben mindig létezik páronként merőleges, 1-normájú vektoroknak egy olyan $(e_n, n \in \mathbb{N})$ rendszere, amellyel minden x vektor egyértelműen írható fel

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_k e_k$$

alakban, ahol a szóban forgó végtelen sor normában konvergens. Az $x_k \in \mathbb{K}$ $(k \in \mathbb{N})$ együtthatók, — más szóval az x koordinátái — a skaláris szorzatot felhasználva kiszámíthatók:

$$x_k = \langle x, e_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{1.1}$$

A továbbiakban azzal foglakozunk, hogy hogyan vihetők át ezek a fogalmak Banach-terekre, ahol — mint tudjuk — nem létezik a merőlegesség fogalmának megfelelője.

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy Banach-tér és jelölje $(X^*, \|\cdot\|)$ az X tér duálisát. Emlékeztetve az ezzel kapcsolatos fogalmakra megjegyezzük, hogy az $\mathbb{X}^*$ elemei a $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{K}$ alakú korlátos lineáris funkcionálok. A $\varphi \in \mathbb{X}^*$ függvénynek az $x \in X$ pontban felvett helyettesítési értékét a

$$\varphi(x) := \langle x, \varphi \rangle \quad (x \in \mathbb{X}, \varphi \in \mathbb{X}^*) \tag{1.2}$$

szimbólummal jelöljük.

Az ortonormált rendszer fogalmát általánosítva bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. *Legyen $\mathcal{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}$-beli vektoroknak $\mathcal{F} = (f_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}^*$-beli finkcionáloknak egy-egy sorozata. Akkor mondjuk, hogy $\mathcal{F}$* **rendszerek biortogonális az** *$\mathcal{E}$-re, ha*

$$\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{N}), \tag{1.3}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-féle szimbólumot jelöli.

Hilbert-tér esetén a duális tér az eredetivel azonosítható, összhangban azzal a ténnyel, hogy ilyenkor minden funkcionál — alkalmas $y \in \mathbb{X}$ elemmel — $\mathbb{X} \ni x \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$ alakban adható meg. Ennek megfelelően, ha az $\mathbb{X}$ Hilbert-térbeli vektorokból álló $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ rendszerre fennáll az (1.3) feltétel, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó ***két vektorrendszert biortogonális.*** Innen az $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ speciális esetben visszakapjuk az ortonormált rendszer definícióját.

Visszatérve a Banach-terekhez most először azt vizsgáljuk, hogy milyen esetben létezik az $\mathcal{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}$-beli vektorokból álló sorozathoz biortogonális rendszer.

Ez a kérdés kapcsolatban áll a következő fogalommal.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $e_n \in \mathbb{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ rendszer* **minimális**, *ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre*

$$e_n \notin X_n := \overline{Span\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}}$$

teljesül, ahol felülvonással a szóban forgó lineáris burok lezárását jelöltük.

Könnyű belátni, hogy az $\mathcal{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha minden $n \in \mathbb{N}$ indexre az

$$e_n \notin \mathrm{Span}\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}$$

feltétel teljesül. Innen nyilvánvaló, hogy ***minden minimális rendszer lineárisan független.***

Az alábbi állítás minimális rendszerek egy jellemzését adja.

1.Tétel. *Az $\mathcal{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ rendszer akkor és csak akkor minimális, ha létezik olyan $\mathcal{F} = (f_k, k \in \mathbb{N})$ $\mathbb{X}^*$-beli rendszer, amely biortogonális $\mathcal{E}$-re. Ha az $\mathcal{E}$ rendszer zárt, akkor egyetlen $\mathcal{E}$-re biortogonális rendszer létezik.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy az $\mathcal{E}$ rendszer minimális. Ekkor az

$$Y_n := \{y = x + \lambda e_n : x \in X_n, \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{1.4}$$

halmaz a $\mathbb{X}$-nek egy lineáris altere, továbbá minden $y \in Y_n$ vektor (1.4) alatti előállítása egyértelmű. Bebizonyítottuk (lásd x. fejezet, y. tételét), hogy az Y_n téren értelmezett

$$f_n(y) := \lambda \quad (y = x + \lambda e_n : x \in X_n, \lambda \in \mathbb{K})$$

funkcionál lineáris és korlátos. Az f_n értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy f_n az X_n téren eltűnik, továbbá $f_n(e_n) = 1$. A Banach-Hahn-tétel alapján ezeket a funkcionálokat kiterjesztve az $\mathbb{X}$-térre egy $\mathcal{E}$-re biortogonális rendszert kapunk.

ii) Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $\mathcal{E}$-hez létezik $\mathcal{F}$ biortogonális rendszer, de $\mathcal{E}$ nem minimális. Ekkor lenne olyan n index, hogy $e_n \in X_n$, következéppen van olyan $\text{Span}\{e_k : k \in \mathbb{N}, k \neq n\}$-beli $(y_k, k \in \mathbb{N})$ sorozat, amely e_n-hez konvergál. Az (1.3) feltételből következik, hogy $f_n(y_k) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, s ezért az f_n folytonossága alapján

$$f_n(e_n) = \lim_{k\to\infty} f_n(y_k) = 0.$$

Ez ellentmond a biortogonalitás definíciójának.

iii) Az unicitás igazolásához tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ rendszerek mindegyike biortogonális az $\mathcal{E}$-re. Ekkor a $\varphi_n = f_n - f_n'$ $(n \in \mathbb{N})$ rendszerre nyilvánvalóan $\varphi_n(e_k) = 0$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Mivel az $(e_k, k \in \mathbb{N})$ rendszer zárt, azért innen az következik, hogy a φ_n funkcionálok az egész $\mathbb{X}$ téren eltünnek, azaz $f_n = f_n'$ $(n \in \mathbb{N})$. $\square$

A zárt és minimális $\mathcal{E}$ rendszer esetén létező egyetlen $\mathcal{F}$ rendszert az $\mathcal{E}$ ***biortogonális rendszerének*** nevezzük. A Fourier sort általánosítva bevezetjük az alábbi fogalmat.

Definíció. *Legyen $\mathcal{E}$ egy zárt, minimális rendszer és jelölje $\mathcal{F}$ az $\mathcal{E}$ biortogonális rendszerét. Ekkor a*

$$x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, f_k \rangle e_k$$

végtelen sort az x vektor **biortogonális sorfejtésének**, *az $\langle x, f_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$ számokat az x vektor* **biortogonális Fourier-együtthatóinak** *nevezzük.*

A koordináta rendszer definícióját általánosítva bevezetjük a következő fogalmat.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathbb{X}$-beli vektorok $\mathcal{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ sorozata az $\mathbb{X}$ tér* **bázisa,** *ha minden $x \in \mathbb{X}$ vektor* **egyértelműen állítható elő**

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \tag{1.5}$$

alakban, ahol $x_k \in \mathbb{K}$ $(k \in \mathbb{N})$ és az (1.5) sor normában konvergens.

Az x_k $(k \in \mathbb{N})$ számokat az x vektor ***$\mathcal{E}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak*** nevezzük. Az x koordináta sorozatának jelölésére az

$$\hat{x} := (x_k, k \in \mathbb{N}) \tag{1.6}$$

szimbólumot használjuk. Rögzítve az $\mathcal{E}$ bázist a tér x veltorait $\hat{x}$ koordináta sorozataikkal jellemezhetjük. Jelöljük ℓ-lel a $\mathbb{K}$-beli sorozatok halmazát. Könnyen igazolható, hogy az $\mathbb{X} \ni x \to \hat{x} \in \ell$ leképezés lineáris és injektív, amelynek értékkészlete

$$\widehat{X} := \{\hat{x} : x \in \mathbb{X}\}$$

lineáris altér ℓ-ben. Ezen a téren vezessük be az

$$\|\hat{x}\| := \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| \quad (\hat{x} = (x_k, k \in \mathbb{N}) \in \widehat{X}) \tag{1.7}$$

fukcionált. Könnyen igazolható (lásd az 1.feladatot), hogy ezzel egy normát értelmeztünk az $\widehat{X}$ téren, továbbá ez a tér ezzel a normával teljes. Minthogy az (1.1) sor normában konvergens, azért

$$\|x\| = \lim_{n \to \infty} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| \leqq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\| \sum_{k=0}^{n} x_k e_k \Big\| = \|\hat{x}\| \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy az $\mathbb{X} \ni x \to \hat{x} \in \widehat{X}$ bijekció inverze korlátos. Ezért a Banach-féle homeomorfia tétel alapján a szóban forgó leképezés maga is korlátos, azaz létezik olyan $K > 0$ szám, hogy mindern $x \in \mathbb{X}$ elemre

$$\|\hat{x}\| \leqq K\|x\| \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{1.8}$$

teljesül.

Minden $x \in \mathbb{X}$ vektorhoz az $\mathcal{E}$ bázisban vett x_n koordinátákat rendelve az

$$e_n^*(x) := x_n \quad (x \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N})$$

funkcionálokat értelmezzük. Ezeket ***koordináta funkcionáloknak*** nevezzük. Az (1.5) értelmezés alapján az x vektor n-edik koordinátájára érvényes az

$$|x_n|\|e_n\| = \|x_n e_n\| = \|\sum_{k=0}^{n} x_k e_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k e_k\| \leqq 2\|\hat{x}\| \leqq 2K\|x\|$$

becslés. Innen következik, hogy

$$|e_n^*(x)| \leqq \frac{2K}{\|e_n\|}\|x\| \quad (x \in \mathbb{X}),$$

azaz e_n^* funkcionálok korlátosak. Az $\mathbb{X}$-beli vektorok (1.5) alakú előállításának egyértelműségéből következik, hogy a koordináta funkcionálok lineárisak, továbbá

$$e_n^*(e_k) = \langle e_k, e_n^* \rangle = \delta_{kn} \quad (k, n \in \mathbb{N}). \tag{1.10}$$

Ezzel megmutattuk, hogy az $\mathcal{E}^* := (e_k^*, k \in \mathbb{N})$ ***koordináta funkcionálok biortogonálisak az $\mathcal{E}$ bázisra, következésképpen $\mathcal{E}$ minimális.*** Ezt felhasználva (1.4)-ből az együtthatókra az

$$x_k = \langle x, e_k^* \rangle \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{1.11}$$

előállítást kapjuk, következésképpen az (1.5) sorfejtés az x vektor biortogonális sorfejtésével azonos. Speciálisan Hilbert-térben az $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ ortonormált bázist véve viszszakapjuk az x vektor $\mathcal{E}$-szerinti Fourier-együtthatóit, ill. Fourier sorát.

Jelölje

$$S_n x := \sum_{k=0}^{n} x_k e_k = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{1.12}$$

az (1.5) sor n-edik részletösszegét. Minthogy

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n x - x\| = 0 \quad (x \in \mathbb{X}),$$

azért minden $x \in \mathbb{X}$ elem tetszőleges pontossággal approximálható az e_k $(k \in \mathbb{N})$ vektorok lineáris kombinációival, azaz ***$\mathcal{E}$ zárt rendszer***.

Összefoglalva és kiegészítve a mondottakat bebizonyítjuk a bázisok jellemzésével kapcsolatos alábbi állítást.

2.Tétel. *Az $\mathcal{E}$ vektorrendszer akkor és csak akkor bázis a $\mathbb{X}$ térben, ha az alábbi három feltétel teljesül:*

i) Az $\mathcal{E}$ rendszer zárt,
ii) Az $\mathcal{E}$ rendszer minimális,
iii) Az (1.5) sorfejtés részletöszeg operátoraira $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| < \infty$ teljesül.

BIZONYÍTÁS. i) Legyen $\mathcal{E}$ bázis. Ekkor — amint azt már korábban beláttuk — $\mathcal{E}$ zárt és minimális rendszer. Végül mivel $(S_n x, n \in \mathbb{N})$ minden $x \in \mathbb{X}$ vektora normában tart x-hez, azért a Banach-Steinhaus-tétel szerint fennáll a iii) állítás.

ii) Most induljunk ki abból, hogy az $\mathcal{E}$ rendszerre teljesülnek az i)-iii) feltételek. Ekkor tekinthetjuk az $\mathcal{E}$-rendszer szerinti biotogonális sorfejtést. Ennek

$$S_n x := \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

részletösszegeire nyilván

$$S_n(e_k) = e_k \quad (n \geq k)$$

teljesül, azért az $(S_n(x), n \in \mathbb{N})$ sorozat az $\mathcal{E}$ zárt rendszer vektorain konvergál x-hez. A Banach-Steinhaus tétel alapján a iii) feltétel figyelembevételével következik, a szóban forgó sorozat minden $x \in \mathbb{X}$ pontban x-hez tart. Ezzel megmutattuk, hogy minden $x \in \mathbb{X}$ pontban fennáll az

$$x = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k^* \rangle e_k$$

egyenlőség, következésképpen az $\mathbb{X}$ tér elemei előállíthatók (1.5) alakban.

Az előállítás egyértelműsége egyszerűen igazolható. A ii) feltétel alapján — felhasználva az 1.tételt — létezik az $\mathcal{E}$ rendszerre biortogonális $\mathcal{E}^*$ biortogonális rendszer. Ha valamely $x \in \mathbb{X}$ elem előállítható (1.5) alakban, akkor a biortogonalitás alapján az (1.5) együtthatóira (1.11) adódik.□

A Haar-függvények integrál függvényei folytonos, szakaszonként lineáris függvények. Schauder lengyel matematikus megmutatta, hogy ezek a $C[0,1]$-térnek egy bázisát alkotják (lásd a 2.feladatot). Erre utalva szokás általában a Banach-terek bázisait ***Schauder-bázisoknak*** nevezni.

Ha valamely Banach-térnek van bázisa, akkor ez ***a tér szeparábilis***, azaz van benne egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz. Valóban, könnyen igazolható, hogy ha $\mathcal{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ az $\mathbb{X}$ egy bázisa, akkor

$$X_0 := \{x_0 e_1 + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n : x_0, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\} \tag{1.12}$$

az $\mathbb{X}$-nek egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza (lásd a 3.feladatot).

Banach vetette fel, hogy igaz-e a fenti állítás megfordátása, azaz ***van-e minden szeparábilis Banach-térnek bázisa ?*** Ezt a ***bázis problémának*** nevezett kérdést sokáig nem tudták megválaszolni. 1964–ben ***Enflo*** svéd matematikus megoldotta a bázis problémát, olyan szeparabilis Banach-teret konstruálva, amelynek nincs bázisa.

6.2. Frame sorfejtések

Ebben a pontban a biortogonális sorfejtések egy általánosításával foglalkozunk. Az újabb fogalmak ismertetése előtt kiemeljük azokat a szempontokat, amelyek ezek bevezetését motiválták.

Az $\mathbb{X}$ tér valamely $\mathcal{F} = (f_n, n \in \mathbb{N})$ funkcionál sorozata akkor használható az $\mathbb{X}$ tér pontjainak jellemzésére, ha bármely $x, y \in \mathbb{X}$ elempárra $f_n(x) = f_n(y)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $x = y$ teljesül. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ ***rendszer teljes***. Minthogy az f_n funkcionálok lineárisak az $\mathcal{F}$ rendszer teljessége a következő állítással ekvivalens:

$$f_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad x = \theta. \tag{2.1}$$

Más szóval az $\mathcal{F}$ rendszer pontosan akkor teljes, ha az $\mathcal{F} : \mathbb{X} \to \ell$ lineáris leképezés ***injektív***.

Gyakorlati feladatokban — alkalmas $\mathcal{F}$ funkcionál sorozatot véve — az $f_n(x)$ függvényértékekből az x elem, ill. a neki megfelelő jel (folyamat) fontos tulajdonságaira tudunk következtetni. Ezért az ilyen funkcionálokat ***jelek analízisére*** használhatjuk.

Általában jóval bonyolultabb a ***szintézis*** feladata, azaz az $x \in X$ elemnek az $\mathcal{F}x = (f_n(x), n \in \mathbb{N})$ sorozatból való rekonstrukciójának kérdése. Ezzel kapcsolatos a következő fogalom, amelynek bevezetéséhez legyen $\mathcal{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ egy $\mathbb{X}$-beli, $\mathcal{F} = (f_n, n \in \mathcal{N})$ egy $\mathbb{X}^*$-beli sorozat. Akkor mondjuk, hogy az $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ rendezett pár egy ***frame*** (vagy magyarul ***keret***) az X téren, ha minden $x \in X$ elemre a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle e_n$ sor konvergens és — Fx-szel jelölve a sor összegét — az $x \to Fx$ lineáris leképezés az X-térnek egy ***korlátos bijekciója***. Az

$$Fx := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle e_n \quad (x \in X) \tag{2.2}$$

utasítással értelmezett korlátos lineáris leképezést ***frame operátornak***, a (2.2) sorban lévő $\langle x, f_n \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ számokat pedig ***frame együtthatóknak*** nevezzük.

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ frame, akkor az e_n $(n \in \mathbb{N})$ elemek lineáris burka mindenütt sűrű az $\mathbb{X}$ térben. Ez más szóval azt jelenti, hogy $\mathcal{E}$ az X tér egy ***zárt rendszere***. Ha $\langle x, f_n \rangle = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor $Fx = \theta$, és mivel $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ lineáris bijekció, azért innen $x = \theta$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy ha $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ frame, akkor $\mathcal{F}$ ***teljes rendszer***.

Kiindulva az $\mathbb{X}$ tér valamely $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ keretéből — az $\mathcal{E}$ rendszer teljessége miatt — az $\mathbb{X}$ tér elemei jellemezhetők a frame együtthatókkal. A Banach-féle homeomorfia tétel alapján az F frame operátor F^{-1} inverze is folytonos és a (2.2) alapján minden $x \in X$ elemre érvényes az

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, f_n \rangle \tilde{e}_n, \quad \tilde{e}_n := F^{-1} e_n \ (n \in \mathbb{N}) \tag{2.3}$$

előállítás. Az x elem (2.3) előállítását ***frame sorfejtésnek*** nevezzük. Ennek alapján az x elem ***rekonstruálható frame együtthatóiból***.

Az $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ keretből kiindulva természetes módon értelmezhető egy másik frame, az ún. ***inverz frame***. Nevezetesen jelölje $F^\circ : \mathbb{X}^* \to \mathbb{X}^*$ az F^{-1} inverz operátor adjungáltját. Ismeretes, hogy $F^\circ : X^* \to X^*$ korlátos lineáris operátor, amelyre

$$\langle F^{-1}x, f\rangle = \langle x, F^\circ f\rangle \quad (x\in\mathbb{X}, f\in\mathbb{X}^*),$$

továbbá $\|F^{-1}\| = \|F^\circ\|$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$\tilde{e}_n := F^{-1}e_n \in \mathbb{X},\ \tilde{f}_n := F^\circ f_n \in \mathbb{X}^* \quad (n\in\mathbb{N})$$

elemekből képzett $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\mathcal{F}})$ kettős is frame az $\mathbb{X}$ téren, amelyet az $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ keret inverz keretének nevezzük.

Az (2.3) előállítást az $x := F^{-1}(y)$ $(y\in\mathbb{X})$ elemre felírva

(2.4) $$F^{-1}y = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle F^{-1}y, f_n\rangle\tilde{e}_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle y,\tilde{f}_n\rangle\tilde{e}_n \quad (y\in\mathbb{X})$$

következik, s ezért $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\mathcal{F}})$ is frame az $\mathbb{X}$ téren, amelynek frame operátora F^{-1}. A (2.2) definícióból $y = Fx$ helyettesítéssel adódik az inverz kereteknek megfelelő sorfejtés:

(2.5) $$y = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle F^{-1}y, f_n\rangle e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle y,\tilde{f}_n\rangle e_n \quad (y\in\mathbb{X}).$$

A F frame operátor és inverzének a korlátosságából következik, hogy léteznek olyan $0 < m \le M$ számok, hogy minden $x\in X$ elemre

(2.6) $$m\|x\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sum_{k=0}^{n}\langle x, f_k\rangle e_k\| \le M\|x\| \quad (x\in\mathbb{X})$$

teljesül. A $\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sum_{k=0}^{n}\langle x, f_k\rangle e_k\| : x\in\mathbb{X}, \|x\|\le 1\}$ halmaz alsó- és felső határát ***frame konstansoknak*** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a két szóban forgó konstan azzal a legkisebb M számmal, ill. azzal a legnagyobb m számmal egyenlő, amelyekkel az (2.6) egyenlőtlenség minden $x\in X$ elemre fennáll. Ha a két frame konstans megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy a frame ***szoros*** (angolul: ***tight***).

A framek egy fontos osztályával kapcsolatos az alábbi

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathcal{E} = (e_n, n\in\mathbb{N})$* **frame egzakt**, *ha az $\mathcal{E}$ bármely tagját elhagyva a maradék rendszer már nem frame.*

A frame definiciójában szereplő feltételek általában nehezen ellenőrizhetők. ***Hilbert tér*** esetén azonban létezik egy jól kezelhető szükséges és elégséges feltétel. Ekkor az $\mathbb{X}$ tér azonosítható $\mathbb{X}^*$ duálisával az $e\in X$ elemeknek megfeleltetve az $\varphi_e(x) := \langle x, e\rangle$ $(x\in\mathbb{X})$ korlátos lineáris funkcionálokat. Itt és a továbbiakban is — összhangban a korábbiakkal — $\langle\cdot,\cdot\rangle$ az $\mathbb{X}$ Hilbert-tér skaláris szorzatát jelöli. Ennek alapján az $\mathbb{X}$-beli elemekből álló $\mathcal{E} = (e_n, n\in\mathbb{N})$ sorozat egyúttal funkcionálok sorozataként is felfogható, következésképpen felvethető a kérdés, hogy az $(\mathcal{E},\mathcal{E})$ pár keretet alkot-e. Erre ad választ az alábbi

1.Tétel. *Az $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ pár akkor és csak akkor frame az $\mathbb{X}$* **Hilbert téren**, *ha léteznek olyan $0 < m \leq M < \infty$ konstansok, hogy minden $x \in \mathbb{X}$ elemre*

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq M\|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{2.7}$$

teljesül. Az

$$Fx := \sum_{n\in\mathcal{N}} \langle x, e_n\rangle e_n \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{2.8}$$

frame operátor önadjungált és pozitív definit, továbbá

$$\langle Fx, x\rangle := \sum_{n\in\mathcal{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (x \in \mathbb{X}). \tag{2.9}$$

Bizonyítás. i) Először tegyük fel, hogy $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren. Ekkor a (2.8) sor normában konvergens és a skaláris szorzat folytonossága alapján bármely $y \in \mathbb{X}$ elemre

$$\langle Fx, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle = \langle x, Fy\rangle \quad (x, y \in X), \tag{2.10}$$

következésképpen F valóban önadjungált. Az utóbbi azonosságban y helyébe x-et írva adódik (2.9). Ismeretes, hogy az F önadjungált operátor normájára

$$\|F\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle Fx, x\rangle|. \tag{2.11}$$

Innen következik, hogy fennáll az (2.7) egyenlőtlenség jobb oldala az $M := \|F\|$ frame konstanssal. Az (2.7) bal oldala az F inverzének korlátosságából következik. Valóban (2.10)-ből a Schwarz-egyenlőtlenség és (2.9) alapján

$$\begin{aligned}|\langle Fx, y\rangle| &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} = \\ &= \left(\langle Fx, x\rangle\langle Fy, y\rangle\right)^{1/2}\end{aligned}$$

adódik. Innen (2.9) és (2.11) alapján következik, hogy

$$\|Fx\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle Fx, y\rangle| \leq (\|F\|\langle Fx, x\rangle)^{1/2} \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Ezt, és az inverz operátor korlátosságát felhasználva az

$$\|x\| = \|F^{-1}(Fx)\| \leq \|F^{-1}\|\,\|Fx\| \leq \|F^{-1}\|(\|F\|\langle Fx, x\rangle)^{1/2} \quad (x \in \mathbb{X})$$

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk az $m = 1/(\|F^{-1}\|^2\|F\|)$ konstanssal.

ii) Megfordítva most tegyük fel, hogy teljesül a (2.7) feltétel. A frame operátor értelmezéséhez először megmutatjuk, hogy a (2.8) jobb oldalán álló sor normában konvergens. Jelölje

$$S_r x := \sum_{n=0}^{r} \langle x, e_n\rangle e_n \quad (r \in \mathbb{N})$$

a (2.8) sor részletösszegeit. Ismeretes, hogy

$$\|S_r x - S_s x\| = \sup\{|\langle S_r x - S_s x, y\rangle| : \|y\| \leq 1\}.$$

A jobb oldalon lévő skaláris szorzat a Cauchy-egyenlőtlenség és (2.7) alapján a következőképpen becsülhető:

$$\begin{aligned}|\langle S_r x - S_s x, y\rangle|^2 &= \Big|\sum_{r \leqq n < s} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle\Big|^2 \leq \Big(\sum_{n=r+1}^{s} |\langle x, e_n\rangle|^2\Big)\Big(\sum_{r \leqq n \leqq s} |\langle e_n, y\rangle|^2\Big) \\ &\leq M \sum_{r < n \leqq s} |\langle x, e_n\rangle|^2 \qquad (\|y\| \leq 1).\end{aligned}$$

Ezzel megmutattuk, hogy

$$\|S_r x - S_s x\|^2 \leq M \sum_{n=r+1}^{s} |\langle x, e_n\rangle|^2 \quad (x \in \mathbb{X}).$$

Innen (2.7) figyelembevételével következik, hogy létezik a (2.8) sor részletöszegeinek a $\|\cdot\|$ normában vett

$$Fx := \lim_{r \to \infty} S_r x \quad (x \in \mathbb{X})$$

határértéke, $F : X \to X$ lineáris operátor, továbbá (2.7) alapján

$$\|Fx\| = \lim_{r \to \infty} \|S_r x\| \leq M^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2\right)^{1/2} \leq M\|x\|^2 \quad (x \in X)$$

teljesül. Következésképpen az $F : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ leképezés korlátos és $\|F\| \leq M$, továbbá fennáll a (2.9) egyenlőség.

Az

$$\langle Fx, x\rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq m\|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{X})$$

egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy az F leképezés injektív.

Végül megmutatjuk, hogy az F értékkészlete az egész $\mathbb{X}$ tér. Ehhez rögzítsünk egy $y \in \mathbb{X}$ elemet. A fixpont-tétel alkalmazásával megmutatjuk, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{X}$ elem, amelyre $Fx = y$.

Legyen

$$G_t z := z - tFz + ty \quad (z \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}).$$

Bebizonyítjuk, hogy alkalmas $t > 0$ paraméter mellett a $G_t : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ leképezés kontrakció. Ennek $x \in \mathbb{X}$ ***fixpontjára***

$$G_t x = x - tFx + ty = x, \quad \text{azaz} \quad Fx = y$$

teljesül. Minthogy

$$\|G_t v - G_t w\| \leq \|I - tF\| \, \|v - w\| \quad (v, w \in \mathbb{X}, t > 0),$$

elég azt megmutatni, hogy alkalmas $t > 0$ számra az $F_t := I - tF$ operátor normájára $\|F_t\| < 1$ teljesül.

Valóban $m\|z\|^2 \leq \langle Fz, z\rangle \leq M\|z\|^2$ $(z \in X)$ alapján minden $z \in X$ elemre

$$(1 - tM)\|z\|^2 \leq \langle F_t z, z\rangle = \langle z, z\rangle - t\langle Fz, z\rangle \leq (1 - tm)\|z\|^2.$$

Minthogy F_t is önadjungált, azért innen $t = 1/M$ esetén

$$\|F_t\| = \sup_{\|z\| \leq 1} |\langle F_t z, z\rangle| \leq \frac{M - m}{M} < 1.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk $\square$.

6.3. Egzakt framek

A frame sorfejtések egy speciális esetét kapjuk, ha $\mathcal{E}$ az $\mathbb{X}$ tér egy bázisa és $\mathcal{F} = \mathcal{E}^*$ az $\mathcal{E}$-re biortogonális rendszer. Ilyenkor minden $x \in \mathbb{X}$ vektorra

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k^* \rangle e_k \quad (x \in \mathbb{X}) \tag{3.1}$$

teljesül, következésképpen az $\mathcal{E}$ olyan keret, amelynek frame operátora az identikus leképezés.

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy az ilyen framek azonosak az egzakt framekkel. Emlékeztetve a definícióra akkor mondjuk, hogy az $\mathcal{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ ***frame egzakt***, ha az $\mathcal{E}$ bármely tagját elhagyva a maradék rendszer már nem frame.

A frame és a bázis közötti különbség szemléltetésére tekintsük a következő példákat (szeparábilis) Hilbert-térre szorítkozva.

Ha $e_n \in \mathbb{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ egy teljes ortonormált rendszer, akkor a ***Parseval-formula*** szerint minden $x \in \mathbb{X}$ elemre

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

teljesül, következésképpen a szóban forgó rendszer ***szoros, egzakt frame*** az $\mathbb{X}$ Hilbert-téren a $m = M = 1$ frame konstansokkal.

Legyen $\mathcal{E}_1 = (e_0, e_0, e_1, e_1, e_2, e_2, \cdots)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy erre a rendszerre is fennáll az (2.7) egyenlőtlenség a $m = 1, M = 2$ konstansokkal, következésképpen $\mathcal{E}_1$ is frame. Nyilvánvaló, hogy az $\mathcal{E}_1$ bármely tagját elhagyva továbbra is frame marad, ezért $\mathcal{E}_1$ nem egzakt. Az $\mathcal{E}_2 = (2e_0, e_1, e_2, e_3, \cdots)$ rendszer egzakt frame a $m = 1, M = 2$ frame konstansokkal.

A most bemutatott példák alapján is nyilvánvaló, hogy a frame tagjai lehetnek lineárisan összefüggők. Ebből adódóan előfordulhat, hogy a (2.3) alatt bevezetett

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle \tilde{e}_n \quad (\tilde{e}_n := F^{-1}e_n,\ n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

frame sorfejtés mellett az x elem $\hat{x} := (\langle x, e_n\rangle, n \in \mathbb{N})$ frame együtthatóktól különböző $a = (a_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell$ együtthatókkal is előállítható

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \tilde{e}_n \quad (a = (a_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell^2) \tag{3.3}$$

alakban. Az összes ilyen együttható sorozat közül a frame együtthatók ℓ^2-normája minimális. Érvényes ugyanis az alábbi

2. Tétel. *Bármely (3.3) feltételnek eleget tevő a sorozatra*

$$\|a\|_{\ell^2}^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 + \|\hat{x} - a\|_{\ell^2}^2, \tag{3.4}$$

következésképpen

$$\|a\|_{\ell^2} \geq \|\hat{x}\|_{\ell^2}.$$

Bizonyítás. A (2.9) egyenlőség alapján

$$\langle x, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|\hat{x}\|_{\ell^2}^2.$$

Mivel F önadjungált, azért

$$\langle \tilde{e}_n, Fx\rangle = \langle F^{-1}e_n, Fx\rangle = \langle e_n, x\rangle,$$

következésképpen (3.3) alapján

$$\langle x, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\langle \tilde{e}_n, Fx\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\langle e_n, x\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\overline{\langle x, e_n\rangle} = \|\hat{x}\|^2_{\ell^2},$$

továbbá az itt szereplő sor összege nyilván valós. Ezt felhasználva

$$\|\hat{x}\|^2_{\ell^2} + \|\hat{x} - a\|^2_{\ell^2} = 2\|\hat{x}\|^2_{\ell^2} + \|a\|^2_{\ell^2} - \sum_{n\in\mathbb{N}}(\langle x, e_n\rangle\bar{a}_n + a_n\overline{\langle x, e_n\rangle}) = \|a\|^2_{\ell^2}.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

Az egzakt keretek egy jellemzését fogalmaztuk meg a következő állításban.

3.Tétel. *Legyen $\mathcal{E} = (e_n, n \in \mathbb{N})$ egy frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren és jelölje $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{e}_n, n \in \mathbb{N})$ az $\mathcal{E}$ frame inverzét. Az $\mathcal{E}$ frame akkor és csak akkor egzakt, ha*

$$\langle e_n, \tilde{e}_n\rangle = 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.5}$$

Speciálisan minden egzakt frame minimális, továbbá $\mathcal{E}$ és $\tilde{\mathcal{E}}$ biortogonális.

Bizonyítás. i) Legyen először $\mathcal{E}$ egzakt frame. Kiindulva a (2.7) egyenlőtlenségből jelölje m és M az $\mathcal{E}$ frame konstansait. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy van olyan $s \in \mathbb{N}$ index, amelyre $a := \langle e_s, \tilde{e}_s\rangle \neq 1$ teljesül. Megmutatjuk, hogy alkalmasan választott $0 < q < 1$ számmal minden $x \in \mathbb{X}$ elemre fennáll az

$$qm\|x\|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le M\|x\|^2 \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség. Innen következik, hogy az $(e_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{s\})$ rendszer is frame, s ez ellentmond annak, hogy $\mathcal{E}$ egzakt.

A (3.6) jobb oldala nyilvánvalóan fennáll. A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához írjuk fel az $y = e_s$ elelemre a (2.5) frame sorfejtést. Ekkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$e_s = (1 - a)^{-1} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} \langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle e_n.$$

A Cauchy–egyenlőtlenség alapján tetszőleges $x \in X$ elemre adódik az

$$|\langle x, e_\ell\rangle|^2 = |1 - a|^{-2}\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} \langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle\langle x, e_n\rangle\Big|^2 \le C \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2,$$

becslés, ahol

$$C := |1 - a|^{-2} \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle|^2 < \infty.$$

Innen (3.6) alapján következik, hogy

$$m\|x\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq (1+C) \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

s ezzel megmutattuk, hogy a (3.6) egyenlőtlenség a $q = (1+C)^{-1}$ konstanssal valóban fennáll. A kapott ellentmondással igazoltuk, hogy egzakt frame esetén minden $n \in \mathbb{N}$ indexre fennáll a (3.6) egyenlőség.

ii) Megfordítva most induljunk ki abból, hogy fennáll (3.5). Legyen $s \in \mathbb{N}$ és induljunk ki az e_s elem következő két előállításából:

$$e_s = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{sn} e_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle e_s, \tilde{e}_n\rangle e_n.$$

Erre a két előállításra és az $x_n = \delta_{sn}$ $(n \in \mathbb{N})$ együttható sorozatra és $\mathcal{E}$ helyett a $\tilde{\mathcal{E}}$ rendszerre felírva a (3.6) egyenlőtlenséget

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_\ell, \tilde{e}_n\rangle|^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle|^2 + |1-1|^2$$

adódik. Innen $\langle e_s, \tilde{e}_s\rangle = 1$ alapján

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{s\}} |\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle|^2 = 0$$

következik. Ezzel megmutattuk, hogy a (3.5) feltétel az $\langle e_s, \tilde{e}_n\rangle = \delta_{sn}$ $(n \in \mathbb{N})$ biortogonalitási feltétel teljesülését vonja maga után. Innen már következik, hogy $\mathcal{E}$ minimális rendszer. A minimális rendszer értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy belőle bármely elem elhagyásával kapott részrendszer már nem lehet zárt rendszer, következésképpen frame sem lehet. Ezzel megmutattuk, hogy a (3.5) feltételnek eleget tevő frame egzakt. □

A fenti meggondolás alapján már egyszerűen adódik az egzakt framekre vonatkozó alábbi norma becslés.

1.Következmény. *Bármely egzakt frame esetén*

$$m \leq \|e_n\|^2 \leq M \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.7}$$

teljesül.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a (2.7) egyenlőtlenséget az $x = \tilde{e}_k := F^{-1}e_k$ elemre és vegyük figyelembe, hogy $\mathcal{E}$ és $\tilde{\mathcal{E}}$ biortogonális. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$m\|\tilde{e}_k\|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle \tilde{e}_k, e_n\rangle|^2 = |\langle \tilde{e}_k, e_k\rangle|^2 \leq \|\tilde{e}_k\|^2 \|e_k\|^2,$$

ahonnan a (3.7) bal oldala már következik.

Megjegyezzük, hogy a (3.6) jobb oldala nemcsak egzakt, hanem bármely keretre fennáll. Ennek igazolásához alkalmazzuk a (2.7) egyenlőtlenséget az $x = e_k$ elemre. Ekkor

$$\|e_k\|^4 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_k, e_n\rangle|^2 \leq M\|e_k\|^2,$$

s ezzel az állítás második részét is igazoltuk. $\square$

Felhasználva a feltétlen bázis fogalmát és a (2.7) feltétel sorrendtől való függetlenségét, a most bizonyított 1.Következmény és a 3.Tétel alapján az egzakt framek egy újabb jellemzését kapjuk. Akkor mondjuk, hogy egy vektorrendszer ***feltétlen bázis*** egy Banach-térben, ha vármely átrendezése bázis.

2.Következmény. *Az $\mathcal{E}$ rendszer akkor és csak akkor egzakt frame az $\mathbb{X}$ Hilbert téren, ha $\mathcal{E}$ feltétlen bázis, amelyre teljesül a (3.7) feltétel.*

6.4. Feladatok

1. Legyen $\mathcal{E} = (e_k, k \in \mathbb{N})$ egy bázis az $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ Banach-térben és $x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k$ az $x \in \mathbb{X}$ vektor előállítása az $\mathcal{E}$ bázisban. Jelölje $\widehat{X} := \{\widehat{x} = (x_k, k \in \mathbb{N})\}$ az $\mathbb{X}$ koordináta terét az $\mathcal{E}$ bázisban.
   1.1. Igazoljuk, hogy $\widehat{X}$ lineáris tér és az (1.7) alatt értelmezett leképezés norma a $\widehat{X}$ téren.
   1.2. Igazoljuk, hogy az $(\widehat{X}, \|\cdot\|)$ tér teljes.
2. Legyen

$$\mathbb{X} := \{f \in C[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}, \ \|f\| := \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Jelölje

$$\varphi_{2^n+k}(x) := 2^{n/2+1} \int_0^x h_{2^n+k}(t)\, dt \quad (x \in [0,1], 0 \leqq k < 2^n, n \in \mathbb{N})$$

a Haar-függvények integrál függvényeit (az ún. Schauder-függvényeket.)

2.1. Igazoljuk, hogy φ_{2^n+k} olyan szakaszonként lineárás (ún. háztető) függvény, amelynek a tartója a $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ intervallum és

$$\varphi_{2^n+k}(k2^{-n}) = \varphi_{2^n+k}((k+1)2^{-n}) = 0, \ \varphi_{2^n+k}((k+1/2)2^{-n}) = 1.$$

2.2. Mutassuk meg, hogy a

$$\phi_{2^n+k}(f) := f((k+1/2)2^{-n}) - \frac{1}{2}\Big(f(k2^{-n}) + f((k+1)2^{-n})\Big) \quad (f \in \mathbb{X})$$

leképezések korlátos, lineáris funkcionálok az $\mathbb{X}$ téren, továbbá ezek biortogonálisak a Schauder-függvényekre:

$$\phi_r(\varphi_s) = \delta_{rs} \quad (1 \leqq r, s < \infty).$$

2.3. Igazoljuk, hogy az $f \in \mathbb{X}$ függvény

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(f)\varphi_k$$

biortogonális sorfejtésének

$$S_{2^n} f = \sum_{k=1}^{2^n - 1} \phi_k(f)\varphi_k$$

részletösszegei interpolálják a függvényt a $k2^{-n}$ $(k = 0, 1, \cdots, 2^n)$ pontokban.
2.4. Az előzőek alapján mutassuk meg, hogy a $(\varphi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ rendszer bázis az $\mathbb{X}$ térben.

3. Igazoljuk, hogy az (1.12) alatt értelmezett X_0 halmaz megszámlálható és mindenütt sűrű az $\mathbb{X}$ térben.