1.6. Fraktálok

A fixpont-tételt felhasználva érdekes geometriai alakzatokat, ún. ***fraktálokat*** konstruálhatunk. Ebben az alkalmazásban az alapul tekintett metrikus tér elemei valamely metrikus tér kompakt részhalmazai, a távolságot pedig az ún. ***Hausdorff-féle metrikával*** értelmezzük.

Induljunk ki egy (X, ρ) metrikus térből és legyen $\widehat{X}$ az X kompakt részhalmazainak összessége:

$$\widehat{X} := \{A \subseteq X : A \text{ kompakt}, A \neq \emptyset\}. \tag{6.1}$$

A Haussdorff-metrika értelmezéséhez jelölje $\rho(a, A)$ az $a \in X$ pontnak a $A \in \widehat{X}$ kompakt halmaztól vett távolságot:

$$\rho(a, A) := \min\{\rho(a, x) : x \in A\}.$$

Minthogy

$$|\rho(a, x) - \rho(a, y)| \leq \rho(x, y) \quad (a, x, y \in X),$$

azért az $X \ni x \to \rho(a, x) \in [0, \infty)$ leképezés (egyenletesen) folytonos. A Weierstrass-tétel alapján létezik a $\rho(a, A)$ minimum. Nyilvánvaló, hogy

$$\rho(a, A) = 0, \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad a \in A.$$

Könnyen igazolható, hogy a halmaztól vett távolságra

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y) \quad (x, y \in X), \tag{6.2}$$

következésképpen az $X \ni x \to \rho(x, A) \in \mathbb{R}_+$ függvény is (egyenletesen) folytonos. Valóban, legyen $y^* \in A$ olyan pont, amelyre $\rho(y, y^*) = \rho(y, A)$. Ekkor a halmaztól vett távolság értelmezése és a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y^*) \leq \rho(x, y) + \rho(y, y^*) = \rho(x, y) + \rho(y, A),$$

ahonnan

$$\rho(x, A) - \rho(y, A) \leq \rho(x, y) \quad (x, y \in X)$$

következik. Innen, valamint az x és y szerepcseréjével adódó egyenlőtlenségből a (6.2) állítást kapjuk. A

$$\rho(B, A) := \max\{\rho(x, A) : x \in B\} \quad (A, B \in \widehat{X}) \tag{6.3}$$

függvény nem szimmetrikus az A és B változókban. Ebből kiindulva azonban már egyszerűen értelmezhető az alábbi metrika.

Definíció. *A*

$$(6.4)\qquad \widehat{\rho}(A,B) := \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} \quad (A,B \in \widehat{X})$$

számot a A és B kompakt halmaz **Hausdorff-távolságának** *nevezzük.*

A továbbiakban szükségünk lesz a Hausdorff-távolságnak az eredeti, fentivel ekvivalens értelmezésére. Ehhez vezessük be az $A \subseteq X$ ***halmaz*** r ***sugarú környezetét***:

$$K_r(A) := \bigcup_{a \in A} K_r(a) \quad (r > 0, A \subseteq X).$$

Ennek felhasználásával tetszőleges $A, B \in \widehat{X}$ halmazra értelmezzük a

$$(6.5)\qquad \chi(A,B) := \inf\{r > 0 : A \subseteq K_r(B)\}$$

számot. Nyilvánvaló, hogy a (6.5) értelmezésben szereplő halmaz nem üres. Most bebizonyítjuk a következő állítást.

6.Tétel. *Bármely $A, B \in \widehat{X}$ halmazra $\rho(A,B) = \chi(A,B)$, következésképpen a Hausdorff-féle távolságra*

$$\widehat{\rho}(A,B) := \max\{\chi(A,B), \chi(B,A)\} \quad (A,B \in \widehat{X})$$

teljesül.

Bizonyítás. Első lépésként megmutatjuk, hogy minden $r < \chi(A,B)$ számra $r \leq \widehat{\rho}(A,B)$, ahonnan $\chi(A,B) \leq \widehat{\rho}(A,B)$ következik.

Valóban, a $\chi(A,B)$ értelmezése és az $r < \chi(A,B)$ feltétel alapján $A \not\subseteq K_r(B)$, azaz létezik olyan $a \in A$, amelyre $a \notin K_r(B)$ teljesül. Innen következik, hogy a szóban forgó $a \in A$ elem egyetlen $K_r(b)$ környezetnek sem eleme, azaz $\rho(a,b) \geq r$ $(b \in B)$. A B halmaztól vett távolság értelmezése alapján $\rho(a,B) \geq r$, következésképpen $\rho(A,B) = \max\{\rho(x,B) : x \in A\} \geq r$.

A fordított irányú $\chi(A,B) \geq \widehat{\rho}(A,B)$ egyenlőtlenség igazolásához legyen most $r > \chi(A,B)$ és mutassuk meg, hogy ekkor $r \geq \rho(A,B)$. Valóban az $r > \chi(A,B)$ feltételből következik, hogy $A \subseteq K_r(B)$, azaz minden $a \in A$ esetén létezik olyan $b \in B$, hogy $a \in K_r(b)$. A szóban forgó pontokra tehát $\rho(a,b) < r$ $(a \in A)$, következésképpen minden $a \in A$ pontban $\rho(a,B) < r$, s ezért $\rho(A,B) \leq r$. $\square$

Most megmutatjuk, hogy a Hausdorff-távolság metrika a kompakt halmazok terén.

7.Tétel. *A $\hat{\rho}(A,B)$ $(A,B \in \widehat{X})$ leképezés egy metrika a $\widehat{X}$ téren.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel, hogy $\hat\rho(A,B)=0$. Megmutatjuk, hogy

$$A\subseteq B,\quad B\subseteq A,\quad \text{következésképpen}\quad A=B.$$

Valóban, ekkor minden $a\in A$ elemre $\rho(a,B)=0$, következésképpen $a\in B$. Ezzel az első tartalmazási relációt igazoltuk. A második hasonlóan igazolható.

ii) A $\hat\rho$ értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy a Hausdorff-távolság szimmetrikus: $\hat\rho(A,B)=\hat\rho(B,A)$ $(A,B\in\widehat X)$.

iii) A

$$\hat\rho(A,B)\le\hat\rho(A,C)+\hat\rho(C,B)\quad (A,B,C\in\widehat X)$$

igazolásához induljunk ki a (6.2) egyenlőtlenségből $a\in A, c\in C$ választás esetén:

$$\rho(a,B)\le\rho(c,B)+\rho(a,c)\le\rho(C,B)+\rho(a,c).$$

Innen $c\in C$ pontokra véve a minimumot

$$\rho(a,B)\le\rho(C,B)+\rho(a,C)\quad (a\in A) \tag{6.6}$$

következik. Áttérve mindkét oldalon az A-ra vett maximumra

$$\rho(A,B)\le\rho(C,B)+\rho(A,C)\le\hat\rho(B,C)+\hat\rho(A,C)$$

adódik. Innen az A és B szerepét felcserélve

$$\rho(B,A)\le\hat\rho(A,C)+\hat\rho(B,C),$$

e két utóbbi egyenlőtlenségből pedig a bizonyítandó háromszög-egyenlőtlenség következik. □

Az X halmazon értelmezett $f:X\to X$ függvény természetes módon terjeszthető ki az $\widehat X$ halmazon értelmezett függvénnyé. Nevezetesen, tetszőleges $A\subseteq X$ halmazra jelölje

$$f(A):=\{f(a):a\in A\}$$

az A halmaz f függvény által létesített képét. Nyilvánvaló, hogy bármely $A_\gamma\subseteq X$ $(\gamma\in\Gamma)$ halmazrendszerre

$$f\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Big)\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f(A_\gamma). \tag{6.7}$$

Több pont-pont függvényből kiindulva is lehet természetes módon halmaz-halmaz leképezést értelmezni. Ezzel kapcsolatos az alábbi fogalom.

Definíció. *Legyenek $f_i : X \to X$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ az X térnek önmagába való leképezései. Ekkor az*

$$\widehat{f}(A) := \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A) \quad (A \subseteq X) \tag{6.8}$$

utasítással értelmezett leképezést az $(f_i, i = 1, \cdots, n)$ függvények által generált **Hutchinson-leképezésnek** *nevezzük.*

A továbbiakban feltesszük, hogy a kiindulásul szolgáló $f_i : X \to X$ függvények folytonosak és az $\widehat{f}$ leképezést leszűkítjük a kompakt halmazok osztályára. Minthogy kompakt halmazok folytonos képe kompakt és véges sok kompakt halmaz egyesítése is kompakt, ezért ilyenkor az $\widehat{f}$ függvény az $\widehat{X}$ halmazt önmagába képezi. Speciálisan, ha az $f_i : X \to X$ $(i = 1, \cdots, n)$ függvények kontrakciók, akkor az $\widehat{f}$ leképezés is az. Ezzel kapcsolatos az alábbi

8.Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f_i : X \to X$ $(i = 1, \cdots, n)$ leképezések kontrakciók a $\kappa_i < 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ kontrakciós állandókkal. Ekkor az ezek által generált $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ Hutchinson-leképezés is kontrakció, azaz*

$$\widehat{\rho}(\widehat{f}(A), \widehat{f}(B)) \le \kappa \widehat{\rho}(A, B) \quad (A, B \in \widehat{X}), \tag{6.9}$$

ahol $\kappa := \max\{\kappa_i : i = 1, \cdots, n\}$.

Bizonyítás. A

$$\rho(f_i(x), f_i(y)) \le \kappa_i \rho(x, y) \quad (x, y \in X)$$

kontrakciós tulajdonságból következik, hogy

$$f_i(K_r(b)) \subseteq K_{\kappa_i r}(f_i(b)) \quad (b \in X, r > 0, i = 1, \cdots, n). \tag{6.10}$$

Valóban, ha $y \in f_i(K_r(b))$, akkor van olyan $x \in K_r(b)$, hogy $f_i(x) = y$. Ekkor $\rho(y, f_i(b)) = \rho(f_i(x), f_i(b)) \le \kappa_i \rho(x, b) < \kappa_i r$, azaz valóban $y \in K_{\kappa_i r}(f_i(b))$.

A $\widehat{f}$ kontrakciós tulajdonsgának igazolásához induljunk ki az $A, B \in \widehat{X}$ halmazokból. Megmutatjuk, hogy

$$\chi(\widehat{f}(A), \widehat{f}(B)) \le \kappa \widehat{\chi}(A, B) \quad (A, B \in \widehat{X}). \tag{6.11}$$

Innen, az A és B szerepcseréjével adódó egyenlőtlenséget és a 6. tételt felhasználva, a bizonyítandó állítást kapjuk.

A (6.11) igazolásához induljunk ki egy $r > \chi(A, B)$ számból. Ekkor $A \subseteq K_r(B)$, következésképpen (6.7), (6.8) és (6.10) alapján minden $i = 1, \cdots, n$ számra

$$f_i(A) \subseteq f_i(\bigcup_{b\in B} K_r(b)) \subseteq \bigcup_{b\in B} f_i(K_r(b)) \subseteq \bigcup_{b\in B} K_{\kappa_i r}(f_i(b)) =$$
$$= \bigcup_{y\in f_i(B)} K_{\kappa_i r}(y) \subseteq \bigcup_{y\in \widehat{f}(B)} K_{\kappa r}(y) = K_{\kappa r}(\widehat{f}(B)).$$

Innen

$$\widehat{f}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A) \subseteq K_{\kappa r}(\widehat{f}(B))$$

adódik, következésképpen

$$\chi(\widehat{f}(A), \widehat{f}(B) \leq \kappa r$$

minden $r > \chi(A, B)$ számra. Áttérve az r-ben vett infimumra, a bizonyítandó (6.11) állítást kapjuk. $\square$

A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha (X, ρ) teljes, akkor a $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ tér is az. Ehhez először is megvilágítjuk $\widehat{\rho}$ metrikában való konvergencia szemléletes tartalmát. Nevezetesen

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m}. \tag{6.12}$$

Valóban, legyen A a bal oldalon álló, B a jobb oldalon álló halmaz, azaz

$$B := \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{B_n}, \text{ahol } \ B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{6.13}$$

Először mutassuk meg, hogy $A \subseteq B$. Ehhez induljunk ki egy $a \in A$ pontból. Legyen $a_n \in A_n$ olyan pont, amelyre $\rho(a, A_n) = \rho(a, a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ teljesül. Ekkor

$$\rho(a, a_n) = \rho(a, A_n) \leq \rho(A, A_n) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

követekezésképpen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $a \in A$ pont bármely környezetében van a B_n halmaznak pontja, azaz $a \in \overline{B_n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, ahonnan $a \in B$ adódik.

A fordított $B \subseteq A$ reláció igazolásához felhasználjuk a

$$\rho(b, A) \leq \rho(b, C) + \widehat{\rho}(A, C)$$

egyenlőtlenséget (lásd (6.6)). Induljunk ki egy $b \in B$ pontból. Ekkor létezik olyan $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ indexsorozat, hogy $a_{\nu_n} \in A_{\nu_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $a_{\nu_n} \to b$, ha $n \to \infty$, következésképpen $\rho(b, A_{\nu_n}) \leq \rho(b, a_{\nu_n}) \to 0$, ha $n \to \infty$. A fenti egyenlőtlenséget $C = A_{\nu_n}$-re alkalmazva és az A értelmezését figyelembe véve

$$0 \leq \rho(b, A) \leq \rho(b, A_{\nu_n}) + \widehat{\rho}(A, A_{\nu_n}) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

azaz $\rho(b, A) = 0$ következik. Ezzel megmutattuk, hogy minden $b \in B$ elemre $b \in A$ teljesül.

Megmutatjuk, hogy az A halmaz ***kompakt***. Minthogy (6.12) alapján A nyilvánvalóan zárt, elég azt igazolni, hogy A teljesen korlátos. Legyen $\epsilon > 0$ és mutassuk meg, hogy A lefedhető véges ϵ-hálóval. A $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ feltételből következik, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$A_n \subset K_{e/3}(A), \quad A \subset K_{e/3}(A_n).$$

Mivel A_n kompakt, azért létezik olyan $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_\ell\} \subset A_n$ véges halmaz, hogy $A_n \subset K_{\epsilon/3}(V)$. Az $A_n \subset K_{e/3}(A)$ feltételből következik, hogy minden $v_j \in V$ ponthoz létezik olyan $u_j \in A$, hogy $\rho(u_j, v_j) < \epsilon/3$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$. Legyen $U := \{u_j : j = 1, \cdots, \ell\}$. Könnyű belátni, hogy $A \subset K_\epsilon(U)$.

Valóban, az $A \subset K_{\epsilon/3}(A_n)$ feltételből következik, hogy minden $a \in A$ ponthoz létezik olyan $a' \in A_n$, hogy $\rho(a, a') < \epsilon/3$. Az $A_n \subset K_{\epsilon/3}(V)$ feltételből következik, hogy létezik olyan $1 \le j \le \ell$, amelyre $\rho(a', v_j) < \epsilon/3$. Ekkor

$$\rho(a, u_j) \le \rho(a, a') + \rho(a', v_j) + \rho(v_j, u_j) < \epsilon,$$

következésképpen $a \in K_\epsilon(U)$. Ezzel az $A \subset K_\epsilon(U)$ állítást igazoltuk.

Most bebizonyítjuk a következő állítást.

9.Tétel. *Legyen (X, ρ) teljes metrikus tér. Ekkor az $(\widehat{X}, \widehat{\rho})$ metrikus tér is teljes.*

Bizonyítás. Induljunk ki egy $A_n \in \widehat{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozatból. Megmutatjuk, hogy a (6.13) alatt értelmezett B halmazra $B \in \widehat{X}$ és $\lim_{n\to\infty} \widehat{\rho}(B, A_n) = 0$, azaz minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan N index, hogy

$$\text{(6.14)} \qquad i)\ \ \rho(A_n, B) < \epsilon, \quad ii)\ \ \rho(B, A_n) < \epsilon, \text{ ha } n \ge N.$$

A Cauchy-sorozat értelmezése alapján minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy $m, n \ge N$ esetén $\widehat{\rho}(A_n, A_m) < \epsilon/2$.

Először a (6.14)i) egyenlőtlenséget igazoljuk, és egyúttal azt is megmutatjuk, hogy $B \ne \emptyset$. Rögzítsünk egy $n \ge N$ indexet és válasszunk olyan $(\nu_k, k \in \mathbb{N})$ indexsorozatot, amelyre $\nu_0 = n$ és $\widehat{\rho}(A_{\nu_k}, A_{\nu_{k+1}}) < \epsilon 2^{-k-2}$ $(k \in \mathbb{N})$ teljesül. Mivel Cauchy-sorozatból indultunk ki, azért ilyen indexsorozat valóban létezik. Legyen $a_n = a_{\nu_0} \in A_n$ tetszőleges és rekurzióval értelmezzük az a_{ν_k} $(k \in \mathbb{N})$ sorozatot: legyen $a_{\nu_{k+1}} \in A_{\nu_{k+1}}$ olyan pont, amelyre

$$\rho(a_{\nu_k}, a_{\nu_{k+1}}) = \rho(a_{\nu_k}, A_{\nu_{k+1}}) < \epsilon 2^{-k-2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $\ell > k$ esetén

$$\text{(6.15)} \qquad \rho(a_{\nu_k}, a_{\nu_\ell}) \le \sum_{i=k}^{\ell-1} \rho(a_{\nu_i}, a_{\nu_{i+1}}) < \epsilon 2^{-k-1}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $(a_{\nu_k}, k \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat az X térben. Mivel X teljes, azért létezik a $b := \lim_{k\to\infty} a_{\nu_k}$ határérték és a B halmaz értelmezése alapján $b \in B$ és így B valóban nem üres.. A (6.15) egyenlőtlenségből $\ell \to \infty$ határátmenettel és $k = 0$ választással

$$\rho(a_n, b) \le \epsilon/2$$

következik. Ezzel megmutattuk, hogy minden $a_n \in A_n$ pontban

$$\rho(a_n, B) \le \rho(a_n, b) \le \epsilon/2,$$

következésképpen $\rho(A_n, B) \le \epsilon/2 < \epsilon$, ha $n \ge N$.

A (6.14)ii) igazolásához legyen $b \in B$. Ekkor a B értelmezése alapján létezik olyan $a_{\nu_n} \in A_{\nu_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, amelyre $a_{\nu_n} \to b$, ha $n \to \infty$, következésképpen létezik olyan $\nu_s \ge N$ index, hogy $\rho(b, a_{\nu_s}) < \epsilon/2$. Innen következik, hogy $\rho(b, A_{\nu_s}) \le \rho(b, a_{\nu_s}) < \epsilon/2$. A (6.6) egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $n \ge N$ indexre minden $b \in B$ pontban

$$\rho(b, A_n) \le \rho(b, A_{\nu_s}) + \widehat{\rho}(A_{\nu_s}, A_n) < \epsilon$$

teljesül, következésképpen $\rho(B, A_n) < \epsilon$, ha $n \ge N$. $\square$