Szeparábilis terek

Def: $(X,\|\ \|)$ N.T. szeparábilis, ha $\exists$ megszámlálható mindenütt sűrű halmaz.

Tétel: $(X,\|\ \|)$ N.T. szeparábilis $\Leftrightarrow$ X geometriai dimenziója megszámlálható.

Biz: $\Rightarrow$: Tfh. X szep. $\Rightarrow$Van M megszámlálható halmaz, hogy $\overline{\mathrm{M}}=X$.
Ha Z=M, akkor $\overline{[Z]}\supset\overline{\mathrm{M}}=X\Rightarrow\overline{[Z]}=X\Rightarrow$ Z zárt rendszer, megsz.
$\Leftarrow$: Tfh. geom.dim megszámlálható. $\Rightarrow$ Van Z zárt rendszer, megszámlálható.$\Rightarrow\overline{[\mathrm{Z}]}=X$.
Legyen M:=$\left\{\sum_{k=1}^{n}(r_k+iq_k)z_k : n\in \mathrm{N},\ z_k\in \mathrm{Z},\ r_k,q_k\in \mathrm{Q}\ \right\}$$\Rightarrow$M megszámlálható és $\overline{\mathrm{M}}=X$ q.e.d.

Köv.: $(C[a,b],\|.\|_\infty)$ geom. dim.-ja megsz. , tehát szeparábilis.
Megj.: A tételben a megszámlálhatóság, az magába foglalja, a véges és a megszámlálható végtelen fogalmát is!
Megj.: R-ben Q mindenütt sűrű és megszámlálható, tehát ez is szeparábilis tér.